

Drugi kolokvijum iz Matematike 1, Hemija, 21.1.2012. GRUPA I

1.(5 poena) Izračunati površinu figure ograničene linijama: $y = x^2 + x + 4$ i $y = 4x + 4$

2.(5 poena) Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{x}{2}y - xy^5 = 0$ koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

3.(5 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $yy'' + (y')^2 + y' = 0$

4.(5 poena) U tri identične kutije nalaze se bele i crne kuglice i to: u prvoj 4 bele i 2 crne, u drugoj 6 belih i 3 crne i u trecoj 7 belih i 2 crne. Iz jedne kutije je na slučajan način izabrana jedna kuglica.

(a) Naći verovatnoću da je izabrana kuglica bela.

(b) Ako je izabrana bela kuglica, odrediti verovatnoću da je ona iz prve kutije.

5.(5 poena) Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & a \end{pmatrix}$$

(a) Odrediti nepoznatu a , a zatim $E(X)$ i $D(X)$.

(b) Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $Y = \frac{1}{2}X^2 - 2$ i izračunati njeno matematičko očekivanje.

Drugi kolokvijum iz Matematike 1, Hemija, 21.1.2011. GRUPA II

1.(5 poena) Izračunati površinu figure ograničene linijama: $y = 4x - x^2$ i $y = 4 - x$

2.(5 poena) Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' + 3xy - \frac{x}{2}y^3 = 0$ koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

3.(5 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $yy'' + yy' + (y')^2 = 0$

4.(5 poena) U tri identične kutije nalaze se bele i crne kuglice i to: u prvoj 4 bele i 2 crne, u drugoj 6 belih i 3 crne i u trecoj 7 belih i 2 crne. Iz jedne kutije je na slučajan način izabrana jedna kuglica.

(a) Naći verovatnoću da je izabrana kuglica crna.

(b) Ako je izabrana crna kuglica, odrediti verovatnoću da je ona iz treće kutije.

5.(5 poena) Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{18} & a & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(a) Odrediti nepoznatu a , a zatim $E(X)$ i $D(X)$.

(b) Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $Y = 2X^2 - 2$ i izračunati njeno matematičko očekivanje.

Rešenje:

1. grupa I

Kriva $y = x^2 + x + 4$ je konveksna parabola koja ne seče x-osu, a y-osu seče u $y = 4$.

Prava $y = 4x + 4$ seče ovu parabolu u tačkama:

$$x^2 + x + 4 = 4x + 4 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$$\text{Tražena površina je: } P = \int_0^3 [(4x + 4) - (x^2 + x + 4)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^3 + 3\frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{6}$$

1. grupa II

Kriva $y = 4x - x^2$ je konkavna parabola koja seče x-osu u $x=0$ i $x=4$.

Prava $y = 4 - x$ seče ovu parabolu u tačkama:

$$4x - x^2 = 4 - x \Rightarrow x = 1, x = 4$$

$$\text{Tražena površina je: } P = \int_1^4 [(4x - x^2) - (4 - x)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = \frac{9}{2}$$

2. grupa I

$$y' - \frac{x}{2} = xy^5 \text{ Bernulijeva DJ, } n=5$$

$$\text{Uvodimo smenu: } y = y^{\frac{1}{1-5}} = u^{-\frac{1}{4}} \rightarrow y' = -\frac{1}{4}u^{-\frac{5}{4}}u'$$

$$\text{Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo: } -\frac{1}{4}u^{-\frac{5}{4}}u' - \frac{x}{2}u^{-\frac{1}{4}} = xu^{-\frac{5}{4}}$$

Pomnožimo levu i desnu stranu jednačine sa $-4u^{\frac{5}{4}}$ i dobijamo:

$$u' + 2xu = -4x \text{ Linearna DJ, } p=2x, q=-4x$$

$$u = e^{\int -2xdx} (C + \int -4xe^{\int 2xdx} dx) = e^{-x^2} (C - \int 4xe^{x^2} dx)$$

Uvodjenjem smene $t = x^2, dt = 2xdx$ dobijamo:

$$u = e^{-x^2} (C - \int 2e^t dt) =$$

$$= e^{-x^2} (C - 2e^t) =$$

$$e^{-x^2} (C - 2e^{x^2}) = Ce^{-x^2} - 2$$

$$\text{Kako je } y = u^{-\frac{1}{4}} \rightarrow y = (Ce^{-x^2} - 2)^{-\frac{1}{4}}.$$

Iz početnog uslova dobijamo da je $C = 2$, pa je partikularno rešenje $y = (2e^{-x^2} - 2)^{-\frac{1}{4}}$

2. grupa II

$$y' + 3xy = \frac{x}{2}y^3 \text{ Bernulijeva DJ, } n=3$$

$$\text{Uvodimo smenu: } y = y^{\frac{1}{1-3}} = u^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u'$$

$$\text{Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo: } -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u' + 3xu^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}u^{-\frac{3}{2}}$$

Pomnožimo levu i desnu stranu jednačine sa $-2u^{\frac{3}{2}}$ i dobijamo:

$$u' - 6xu = -x \text{ Linearna DJ, } p=-6x, q=-x$$

$$u = e^{\int -6xdx} (C + \int -xe^{\int 6xdx} dx) = e^{3x^2} (C - \int xe^{3x^2} dx)$$

Uvodjenjem smene $t = 3x^2, dt = 6xdx$ dobijamo:

$$u = e^{3x^2} (C + \int \frac{1}{6}e^t dt) =$$

$$= e^{3x^2} (C + \frac{1}{6}e^t) =$$

$$e^{3x^2} (C + \frac{1}{6}e^{3x^2}) = Ce^{3x^2} + \frac{1}{6}$$

$$\text{Kako je } y = u^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y = (Ce^{3x^2} + \frac{1}{6})^{-\frac{1}{2}}.$$

Iz početnog uslova dobijamo da je $C = \frac{5}{6}$, pa je partikularno rešenje $y = (\frac{5}{6}e^{3x^2} + \frac{1}{6})^{-\frac{1}{2}}$

3. grupa I

$$yy'' + (y')^2 + y' = 0 \text{ je DJ II reda oblika } F(y, y', y'') = 0.$$

$$\text{Uvodimo smenu: } y' = p \rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}p$$

$$\text{Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo: } y\frac{dp}{dy}p + p^2 + p = 0$$

Podelimmo sve sa yp i dobijamo:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = -\frac{1}{y} \text{ Linearna DJ}$$

$$p = e^{\int -\frac{1}{y}dy} (C + \int -\frac{1}{y}e^{\int \frac{1}{y}dy} dy) = \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(C-y)}{y} \\
p = y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{(C-y)}{y} \text{ Jednačina sa razdvojenim prom.} \\
\int \frac{-y dy}{y-C} &= \int dx \\
- \int \frac{y-C+C}{(y-C)} dy &= x + D \\
- \left(\int dy + \int \frac{C}{(y-C)} \right) dy &= x + D \\
- y - C \ln|y-C| &= x + D
\end{aligned}$$

3. grupa II

$yy'' + yy' + (y')^2 = 0$ je DJ II reda oblika $F(y, y', y'') = 0$.

Uvodimo smenu: $y' = p \rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}p$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo: $yp \frac{dp}{dy} + yp + p^2 = 0$

Podelimo sve sa yp i dobijamo:

$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = -1$ Linear na DJ

$$p = e^{\int -\frac{1}{y} dy} (C - \int e^{\frac{1}{y} dy} dy) = \dots$$

$$= \frac{(2C-y^2)}{2y}$$

$p = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2C-y^2)}{2y}$ Jednačina sa razdvojenim prom.

$$\int \frac{2y}{2C-y^2} dy = \int dx$$

Uvodjenjem smene $t = 2C - y^2, dt = -2y dy$ dobijamo: $-\int \frac{dt}{t} = x + D$

$$-\ln|t| = x + D \rightarrow -\ln|2C - y^2| = x + D$$

4. grupa I

H_i - izabrana i-ta kutija, $i=1,2,3, p(H_i) = \frac{1}{3}$

A - izvučena je bela kuglica

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) + p(H_3)p(A|H_3) = \frac{1}{3} \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \frac{6}{9} + \frac{1}{3} \frac{7}{9} = \frac{19}{27}$$

$$p(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{\sum p(H_i)p(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{4}{6}}{\frac{19}{27}} = \frac{6}{19}$$

4. grupa II

H_i - izabrana i-ta kutija, $i=1,2,3, p(H_i) = \frac{1}{3}$

A - izvučena je crna kuglica

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) + p(H_3)p(A|H_3) = \frac{1}{3} \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \frac{2}{9} = \frac{8}{27}$$

$$p(H_3|A) = \frac{p(H_3)p(A|H_3)}{\sum p(H_i)p(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{2}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{1}{4}$$

5. grupa I

$$a = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$$

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 4 & 16 & 36 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 4 \cdot \frac{5}{6} + 16 \cdot \frac{1}{12} + 36 \cdot \frac{1}{12} = \frac{23}{3}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{23}{3} - \frac{121}{36} = \frac{155}{36}$$

$$Y = \frac{1}{2}X^2 - 2 : \begin{pmatrix} 0 & 6 & 16 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{1}{12} + 16 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$

5. grupa II

$$a = 1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = -3 \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{13}{9}$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{5}{18} + 9 \cdot \frac{5}{9} + 25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{85}{9}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{85}{9} - \frac{169}{81} = \frac{596}{81}$$

$$Y = 2X^2 - 2 : \begin{pmatrix} 0 & 16 & 48 \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{5}{18} + 16 \cdot \frac{5}{9} + 48 \cdot \frac{1}{6} = \frac{304}{18}$$